

## 2 種類の情報エントロピーによる 非線形力学系の複雑性の特徴付け

青木 孝之

聖隷クリストファー大学看護学部

## Characterization of Complexity of the Dynamical Systems by Two Types of Informational Entropy

Takayuki AOKI

Department of Nursing, Seirei Christopher College

### 抄 録

自然及び社会現象を記述するモデルである力学系は、その振舞いを観察するにあたり、文字の系列から成る言葉を発する情報源と見なすことが出来る。この言葉の時系列の複雑性を2種類の情報エントロピーによって計量し、系の振舞いを特徴付ける方法を提案する。2つのエントロピーの値の組を2次元座標としてプロットした代表点から成るエントロピー相関図を作成すると、力学系の振舞いの特徴は代表点の位置によって説明出来る。

キーワード：非線形力学系、情報エントロピー、複雑性、エントロピー相関図

## §1. 序論

力学系の複雑性についての議論は近年、数学的モデル以外にも物理、化学、生物学系においても為されている。複雑性に関する定性的な探究は、物理学、数学、情報科学、生物学などの分野における急速に進展しつつある主題の1つである。本稿では、非線形力学系の動的振舞いの複雑性を表現する簡単な方法を提案する。

一般にある数学的モデル（例えば、ローレンツモデル、ロジスティック写像系など）は、連続的もしくは離散的を問わず、物理学上の力学系の振舞いを近似的に表現したものである。このようなモデルは、通常何らかの制御パラメータ（外部的な“力”に相当する）を含んでおり、このパラメータの値が変化することによって、系の動的振舞いも変化する。この変化を厳密に理解するには、系の複雑性を定量的に表すことが必要である。我々は、非線形力学系の動的振舞いの変化を、確率論的もしくは情報理論的見地から特徴付ける方法を提案したい。

## §2. 情報エントロピーの導入

力学系は、その時間的な振舞いの変動（振動）を通して、外部に何らかの情報を発する情報源と見なすことが出来る。この時間的な変動を最も簡潔に特徴付けるには、力学系の状態を表す変数の時間変化を2つのカテゴリ（＝文字）に振り分けて考えればよい。例えば、OFO II<sup>1)</sup>については1つの変数の時間的な振動の振幅が一定値より大きい小さいかによって、大振幅の振動と小振幅の振動に分類出来る。この分類によって力学系の一定の振動状態は、文字L（大振幅の振動に相当）、S（小振幅の振動に相当）、或いは数字1, 0の系列から成る文を形成し、これ

は力学系が外部に発する言葉、すなわち情報と解釈出来る。このように力学系の動的振舞いを2文字で記号化する方法を、ビット型の解釈と呼ぶ。この方法で形成される文は力学系の動的振舞いの複雑性を特徴付ける。この文（＝2文字の時系列）から複雑性を計量する指標として、2種類の情報エントロピーを導くことが出来る。シャノンの情報エントロピー  $h_S$  とマルコフ過程のエントロピー  $h_M$  である。

$h_S$  は次の式で定義される。

$$h_S = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad (1)$$

但し、 $p_i$  は  $i$  番目の文字の時系列中での出現確率で、ビット型の解釈では2文字を用いるので、 $n=2$  である。すなわち  $p_L, p_S$  はそれぞれ文字 L, S に相当する状態の出現確率を表す。マルコフ過程のエントロピー  $h_M$  は次の式で定義される。

$$h_M = -\sum_{i,j=1}^n p_i t_{ij} \log_2 t_{ij} \quad (2)$$

$t_{ij}$  は時系列中での  $i$  番目の文字から  $j$  番目の文字への遷移確率を表す。具体的な力学系のモデルとしては、ロジスティック写像系、テント写像系、ベルヌーイ写像系（2進変換）、屋根型写像系、OFOモデル（OFO II）を取り上げ、各モデルの制御パラメータの一定値について数値シミュレーションを実行して  $h_S$  と  $h_M$  を求める。

ロジスティック写像系、テント写像系、ベルヌーイ写像系、屋根型写像系は、それぞれ変数  $X_n$  について区間  $[0, 1]$  上で定義される以下のような1次元写像系である。

a) ロジスティック写像系

$$X_{n+1} = L_R(X_n) = R X_n (1 - X_n)$$

制御パラメータ  $R$  は  $0 < R \leq 4$  とする。このときにかぎり、すべての  $0 \leq X_n \leq 1$  に対して  $0 \leq L_R(X_n)$

$\leq 1$ となる。特に  $3 < R < R_\infty \doteq 3.57$  の範囲で定常軌道（行きつく先の軌道）について  $2^n$  分岐（2倍周期分岐： $n=1, 2, \dots$ ）が次々と生ずる。 $R_\infty$  からカオスが出現し始め、その幅を次第に広げてゆくが、 $R_\infty < R$  にはカオス状態以外に周期軌道の領域（“窓”と呼ばれる）が10%ほど存在する。

b) テント写像系

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= T_A(X_n) = 2AX_n & (0 < X_n < \frac{1}{2}) \\ &= 2A(1-X_n) & (\frac{1}{2} < X_n < 1) \end{aligned}$$

制御パラメータ  $A$  は  $0 < A < 1$  とする。このときすべての  $0 \leq X_n \leq 1$  に対して  $0 \leq T_A(X_n) \leq 1$  となる。 $A$  の値を増加させると、定常軌道は  $A = \frac{1}{2}$  を境に  $X_n = 0$  の安定周期軌道からカオス状態へ移行し、さらに  $A$  を増加させると、カオスの領域が  $X_n$  の区間  $[0, 1]$  全体に広がってゆく。

c) ベルヌーイ写像系（2進変換）

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= B_A(X_n) = \frac{X_n}{A} & (0 < X_n < A) \\ &= \frac{X_n - A}{1 - A} & (A < X_n < 1) \end{aligned}$$

制御パラメータ  $A$  は  $0 < A < 1$  とする。このとき、すべての  $0 \leq X_n \leq 1$  に対して  $0 \leq B_A(X_n) \leq 1$  となる。この範囲のすべての  $A$  の値について、定常軌道は  $X_n$  の値が区間  $[0, 1]$  全体に広がったカオス状態となる。

d) 屋根型写像系

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= R_A(X_n) = A + 2(1-A)X_n & (0 < X_n < \frac{1}{2}) \\ &= 2(1-X_n) & (\frac{1}{2} < X_n < 1) \end{aligned}$$

制御パラメータ  $A$  は  $0 < A < 1$  とする。このとき、すべての  $0 \leq X_n \leq 1$  に対して

$0 \leq R_A(X_n) \leq 1$  となる。 $A < \frac{1}{2}$  ではカオス状態で

あるが、 $A > \frac{1}{2}$  では次第にカオスの幅が小さくなり、 $A > 0.75$  で2周期状態となる。

これら4つの写像系においては、 $X_n$  の値域を0.5を境界として2つに分けて、 $X_n < 0.5$  に文字S、 $X_n > 0.5$  に文字Lを対応付けて文字の時系列を形成する。

e) OFO II<sup>1), 2), 3)</sup> は開放型BZ反応系のモデルの1つで、オレゴネータモデル<sup>4)</sup> に流動項を付加したものである。流速に対応する制御パラメータ  $R$  を  $0.950 < R < 1.100$  の範囲で変動させると、系の振動状態は周期的な振動からカオスに近い振動まで複雑に変化し、実験値<sup>5)</sup> と定性的によく一致するが、基本的にその振動は大振幅と小振幅の2種類の振動の組み合わせから成る<sup>3)</sup>。前者に文字L、後者に文字Sを対応づけて振動状態に対応する文字の時系列を形成する。

### §3. エントロピーダイアグラム

5種類の系に対するシミュレーション結果は  $(h_S, h_M)$  の数値の組を2次元座標としてプロットした  $h_S - h_M$  の相関図（エントロピーダイアグラムと呼ぶ）によって表わされる。ダイアグラム上の点  $(h_S, h_M)$  は各系の制御パラメータの値によって定まる特定の状態に対応する。この点を代表点と呼ぶことにする。制御パラメータの値の変動と共に代表点はダイアグラム上を移動する。図1 (a), (b), (c), (d), (e) は上に述べた5つの系それぞれについてのエントロピーダイアグラムである。

図1 (a) はロジスティック写像系について、制御パラメータ  $R$  を  $3 < R < 4$  の範囲にとり、 $R$  の間隔  $\Delta R = 0.01$  として各  $R$  の値についての代表点をプロットしたものである。点  $(1, 1)$  近傍に分布する代表点群は、 $R \leq 4$  のパラメータ領域に相当し、 $X_n$  の値が区間  $[0, 1]$  内で大きな広がり

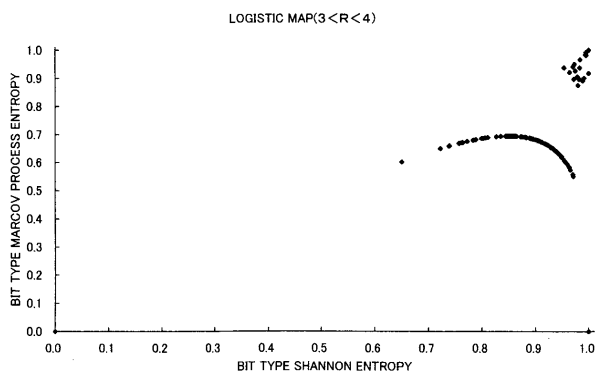


図1(a) ロジスティック写像系についてのエントロピー相関図  
曲線状に並ぶ点群と点(1, 1)付近の点群より成る。

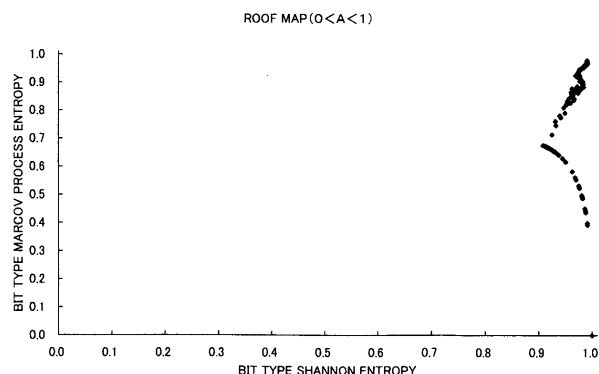


図1(d) 屋根型写像系についてのエントロピー相関図  
配置は異なるが、テント写像系と同様に曲線状に並ぶ点群と点(1, 1)付近からほぼ直線状に伸びる点群より成る。

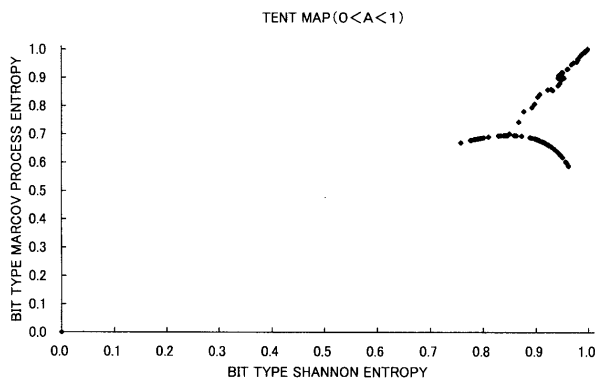


図1(b) テント写像系についてのエントロピー相関図  
曲線状に並ぶ点群と点(1, 1)付近からほぼ直線状に伸びる点群より成る。

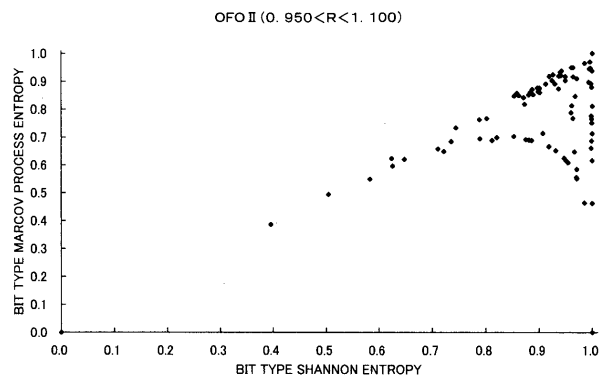


図1(e) OFO II についてのエントロピー相関図  
点(0, 0)と点(1, 1)を結ぶ直線上に並ぶ点群、曲線状に並ぶ点群、及び点(1, 0)と点(1, 1)を結ぶ直線上に並ぶ点群より成る。

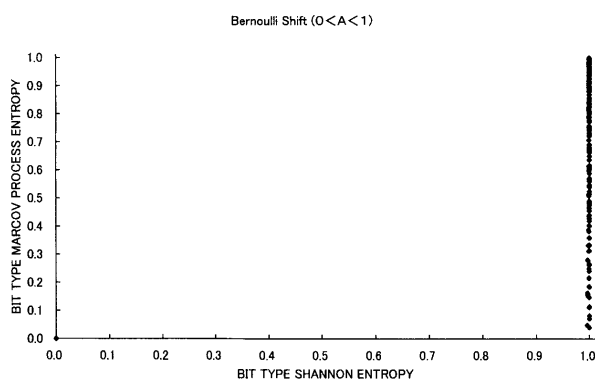


図1(c) ベルヌーイ写像系についてのエントロピー相関図  
点(1, 0)と点(1, 1)を結ぶ直線上に並ぶ点群より成る。

の幅をもつカオス状態に対応する。それ以外のほぼ規則的に曲線状に並ぶ点群は $2^n$  周期軌道とカオスでも区間  $[0, 1]$  内での  $X_n$  の値の広がり  
の幅が余り大きくない状態に対応する。

図1 (b) はテント写像系について、制御パラメータ  $A$  を  $0 < A < 1$  の範囲にとり、 $A$  の間隔  $\Delta A = 0.005$  として各  $A$  の値についての代表点をプロットしたものである。点 (1, 1) からほぼ直線状に並ぶ代表点群は、 $A \geq 0.815$  のパラメータ領域に相当し、大きな広がり  
の幅をもつカオス状態に対応する。それ以外の図1 (a) とほぼ同一の曲線上に並ぶ点群は  $A \leq 0.810$  のパラメータ領

域に相当し、 $2^n$  周期軌道と  $x_n$  の値の広がり幅が余り大きくないカオス状態に対応する。

図1 (c) はベルヌーイ写像系について、制御パラメータ  $A$  を  $0 < A < 1$  の範囲にとり、 $A$  の間隔  $\Delta A = 0.005$  として各  $A$  の値についての代表点をプロットしたものである。すべての代表点が、 $x_n$  の値が区間  $[0, 1]$  全体に広がるカオス状態に対応するが、常に  $h_S = 1$  であるため、代表点は  $(1, 0)$  と  $(1, 1)$  を結ぶ直線上に並ぶ。 $(1, 1)$  に近いほど分布密度が大きくなる。

図1 (d) は屋根型写像系について、制御パラメータ  $A$  を  $0 < A < 1$  の範囲にとり、 $A$  の間隔  $\Delta A = 0.005$  として各  $A$  の値についての代表点をプロットしたものである。点  $(1, 1)$  からほぼ直線上に並ぶ代表点群は、 $A < 0.5$  のパラメータ領域に相当し、区間  $[0, 1]$  全体へ広がるカオス状態に対応する。それ以外の曲線上に並ぶ点群は  $A > 0.5$  のパラメータ領域に相当し、カオスの広がり幅が次第に小さくなり、 $2^n$  周期軌道へ移行する過程の状態に対応する。

図1 (e) はOFO IIについて、制御パラメータ  $R$  を  $0.950 < R < 1.100$  の範囲にとり、 $R$  の間隔  $\Delta R = 0.001$  として各  $R$  の値についての代表点をプロットしたものである。パラメータのこの範囲内に周期状態とカオスに近い状態が複雑に混在しているが、代表点の分布はほぼ3つの群に分かれる。1つは点  $(0, 0)$  と  $(1, 1)$  を結ぶ直線上に並ぶもので、 $(1, 1)$  近傍で特に分布密度が大きくなっているが、これはカオス的な状態に対応する。2つ目は図1 (a), (b) と類似した曲線上に並ぶ点群で、これらはこの後で述べる周期状態  $\Pi(n)$  に対応する。3つ目は、ほぼ2点  $(1, 0)$  と  $(1, 1)$  を結ぶ直線上に並ぶもので、これはベルヌーイ写像系に類似する点群である。

図1 (a), (b), (c), (d), (e) から、これらすべてのモデルについて、それぞれ制御パラ

メータを一定の範囲で変動させたとき、代表点はダイアグラム上で3つの境界線によって囲まれた領域に収まることがわかる。

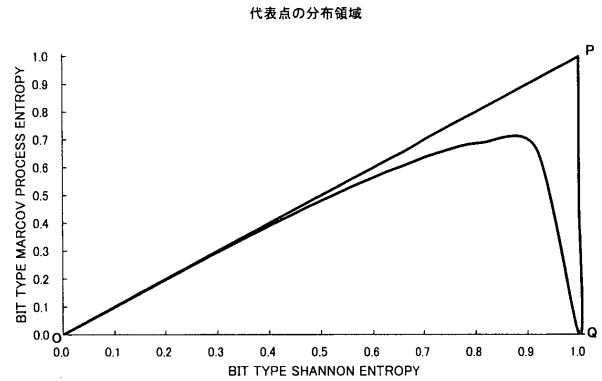


図2 全ての系の代表点を包含する領域  
直線OP：エルゴディックライン  
直線PQ：ベルヌーイライン  
曲線OQ：周期曲線  
で囲まれた領域がこれに相当する。

図2はダイアグラムのこの領域を画いたものであり、3つの代表点  $O(0, 0)$ ,  $P(1, 1)$ ,  $Q(1, 0)$  と3つの境界線から構成されている。3点  $O$ ,  $P$ ,  $Q$  は以下のようなそれぞれ特徴的な系を表している。点  $O$  は文字  $L$  または  $S$  に相当する同じ状態が続く系、すなわち  $LLL\cdots$ 、または  $SSS\cdots$  という文を発する系を表す。点  $P$  はコイントスの状態に相当し、 $L$  と  $S$  が無秩序に  $\frac{1}{2}$  ずつの確率で出現する系を表す。点  $Q$  は  $L$  と  $S$  が交互に出現する規則的な状態、すなわち  $LSLS\cdots$  という文を発する系を表す。3つの境界線は直線  $OP$ 、直線  $PQ$ 、曲線  $OQ$  から成る。直線  $OP$  はエルゴード系に相当するもので“エルゴディックライン”と呼ぶ。この直線上の点に対応する系はエルゴード特性を有し、エルゴード情報源のように振舞う。すなわち、文字  $L$  の出現確率  $p_1$  と文字  $S$  の出現確率  $p_2$  の長時間平均がそれぞれ一定値となるという条件の下で、 $L$  と  $S$  に相当する状態が無秩序に出現する。エルゴード特性とは、状態  $i$  から  $j$  への

遷移確率が  $j$  のみに依存することを意味する。その場合遷移確率  $t_{ij}$  は  $t_{ij} = p_j$  を満たすから、 $h_S = h_M$  となり、代表点は直線OP上に配置される。直線PQはベルヌーイ写像系に相当するもので、“ベルヌーイライン”と呼ぶ。この直線上ではL, S2つの状態の出現確率は等しく、 $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$  となり、 $h_S = 1$  が常に成り立つ。一方遷移確率  $t_{ij}$  は制御パラメータの値によって変動するため、 $h_M$  が変化し、この直線上を動くことになる。曲線OQは周期系に相当するもので、“周期曲線”と呼ぶ。 $n$  周期系とは、文字Lの後に文字Sが  $(n-1)$  回続く状態が周期的に反復される系 ( $\Pi(n)$  と記す) を意味する。 $\Pi(n)$  についての2種類のエントロピー  $h_S^{(n)}, h_M^{(n)}$  は理論的に計算され、

$$h_S^{(n)} = \frac{1}{n} \log_2(n-1) + \log_2\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$h_M^{(n)} = \frac{1}{n} \log_2(n-1) - \frac{n-2}{n} \log_2\left(\frac{n-2}{n-1}\right)$$

となる。 $(h_S^{(n)}, h_M^{(n)})$  を整数  $n (\geq 2)$  についてプロットすることにより曲線OQが得られる。

#### § 4. 複雑性の表現

2種類の情報エントロピーについてのエントロピーダイアグラムは、制御パラメータの値によって決まる系の動的振舞いの特徴を表す。座標  $(h_S, h_M)$  で定まる代表点の位置がこれを示す。代表点は系が3点O, P, Q及び3つの境界線OP, PQ, OQからどれだけ隔たっているかを明示し

ている。すなわち、エントロピーダイアグラム中での系の絶対的な位置を定めるという意味で、代表点は系の動的振舞いの複雑性を表す。複雑さという観点からは3点O, P, Qはそれ

ぞれ特徴的な系に対応する。点Oは最も単純な系を表し、 $h_S = h_M = 0$  (最小値) である。一方点Pは最も複雑な系を表し、 $h_S = h_M = 1$  (最大値) である。点Qは  $h_S$  は最大値、 $h_M$  は最小値となる点で、中間的な複雑さを表す。3つの境界線はそれぞれ独自の複雑性を表している。特に“エルゴディックライン”OPと“周期曲線”OQは、それぞれ2つの極限的な状態から成る。すなわち確率  $p_1, p_2$  を固定したときの最も複雑な状態から成るのが直線OPであり、秩序立った状態からなるのが曲線OQである。“ベルヌーイライン”PQは  $h_S$  は1 (最大値) で  $h_M$  は0から1に至る状態から形成されている。ある系の代表点の3点O, P, Qに対する距離、及び3つの境界線OP, PQ, OQに対する距離はそれぞれ異なる。すなわち、ダイアグラム上でのある系の複雑さは相対的なベクトル量であり、スカラー量で表すのは難しいが、我々はあえて単純なスカラー量として、以下のような2通りの方法で、複雑性の指標を導入したい。

$$C_1 = h_S - h_M \quad (3)$$

$$C_2 = h_S + h_M \quad (4)$$

(3) 式の  $C_1$  はダイアグラム上での点  $(h_S, h_M)$  と“エルゴディックライン”OPとの距離を表す。すなわち、最も複雑な“エルゴディックライン”上の状態との隔たりをもって系の複雑性の尺度とするもので、 $C_1$  が小さいほど複雑性が大きい。(4) 式の  $C_2$  は原点Oからの隔たりを表す。 $h_S, h_M$  それ自身、系の複雑性を表すから、両者の和で系の複雑性を定義するもので、 $C_2$  が大きいほど複雑性が大きい。

以上非線形力学系の動的振舞いの特性を表す単純な方法を示した。すなわち、2種類の情報エントロピー  $h_S, h_M$  によって構成されるエントロピーダイアグラムによって系の複雑性を表現することが出来る。

## 参考文献

- 1) 青木孝之 (1993)：非線形振動反応の数値解析 (その1. Belousov-Zhabotinsky 反応はカオスを生ずるか?)。聖隷クリストファー看護大学紀要, 1, 98-111.
- 2) 青木孝之 (1996)：非線形振動反応の数値解析 (その2. Belousov-Zhabotinsky 反応に関する流動項付きOregonator モデルの振舞い)。聖隷クリストファー看護大学紀要, 4, 95-107.
- 3) 青木孝之 (2001)：非線形振動反応の数値解析 (その3. 流動項付きオレゴネータモデルの振舞いに関する情報・言語的解釈)。聖隷クリストファー看護大学紀要, 9, 43-55
- 4) R. J. Field and R. M. Noyes(1974)：J. Chem. Phys., 60, 1877.
- 5) J. L. Hudson, M. Hart and D. MARINKO(1979)：J. Chem. Phys., 71, 1601.